Домашнее задание №8

Преобразования координат.

Вариант 1

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x}^2 + 2\dot{y}^2 - 3xy^2$. Введем новые координаты согласно соотношениям $x = \xi + \eta$, $y = \xi\eta$. Составьте новую функцию Лагранжа. Напишите уравнения Эйлера-Лагранжа в исходной и в новой системах координат. Проверьте, что из справедливости первых следует справедливость вторых.

2. Функция Лагранжа системы $L = \dot{x}^2 + \dot{x}\dot{y} + 2\dot{y}^2 + x^2 + 3xy + y$. Подберите преобразования сдвига и поворота, диагонализующее потенциальную энергию. Будет ли квадратичная форма, отвечающая кинетической энергии, диагональной? Напишите уравнения движения в двух системах и убедитесь в их ковариантности.

3. Если преобразование затрагивает не только координаты, но и время, преобразование функции Лагранжа не сводится к замене переменных, в отличие от действия. Найдите новую функцию Лагранжа, если в исходной системе $L = \dot{x}^2 + (x - 2t)^2 + 3x$, а преобразования имеют вид $x = \xi$, $t = 2\tau + 2\xi$. Как преобразовываются скорость и ее производная? Составьте уравнения движения в двух системах и проверьте их ковариантность.

4. Для произвольной системы с одной степенью свободы проверьте, что преобразования координат и времени $x = \xi + 2\tau$, $t = \tau\xi$ оставляют уравнения движения истинными, если в функции Лагранжа сделать замену переменных и умножить ее на производную $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau$.

5. Частным случаем преобразований координат является переход в неинерциальную систему отсчета. Получите уравнения движения частицы массой m, находящейся в поле $U(\mathbf{r})$, в неинерциальной системе отсчета, движущейся вдоль направления $(2, 3, -5)$ со скоростью, модуль которой $v(t) = 2t + 4$.

6. Запишите функцию Лагранжа и уравнения движения частицы массой m, находящейся в поле $U(\mathbf{r})$, в неинерциальной системе отсчета, вращающейся вокруг оси x с угловой скоростью, модуль которой $\omega(t) = 5 + 4t^3$. Используйте декартову систему координат.

7. Найдите правила, по которым преобразуются обобщенные импульсы и энергия системы с двумя степенями свободы при переходе к координатам ξ, η согласно соотношениям $x = \xi + t\eta$, $y = t\xi + 2\eta$.

8. Рассмотрим двумерное движение точки массой m в поле $U(\mathbf{r})$. Переход к новой ортогональной системе координат задается квадратичной формой для элемента длины $\mathrm{d}s^2 = \xi^2\mathrm{d}\xi^2 + \xi\mathrm{d}\eta^2$. Определим ускорение точки как отношение силы к ее массе, а сила определяется градиентом потенциальной энергии. Напишите уравнения движения в новой системе. Найдите ускорение точки.

9. При переходе от координат x, y к ξ, η обобщенные импульсы и энергия преобразуются по закону
$P_\xi = (\eta - \xi^2)P_x + \eta^2 P_y$, $P_\eta = \xi P_x + (2\xi\eta + \eta)P_y$, $\varepsilon = E + 4tP_x$. Каким мог быть явный вид преобразований?

10. Учет сил трения или реакции связей в подходе Лагранжа осуществляется введением в правую часть уравнений Эйлера-Лагранжа соответствующих обобщенных сил R_i. Найдите эти силы в системе координат ξ, η, если в исходной системе x, y они имели вид $R_x = 2\dot{x}^2 x + y^2 t$, $R_y = \dot{y}^3 + 3$, а преобразования координат задаются соотношениями $x = \xi t + \eta$, $y = 3\xi\eta$.

Домашнее задание №8

Преобразования координат.

Вариант 2

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x}^2 + \dot{x}\dot{y} - x^2 - y$. Введем новые координаты согласно соотношениям $x = \xi + \eta$, $y = -2\eta$. Составьте новую функцию Лагранжа. Напишите уравнения Эйлера-Лагранжа в исходной и в новой системах координат. Проверьте, что из справедливости первых следует справедливость вторых.

2. Функция Лагранжа системы $L = 2\dot{x}^2 + \dot{x}\dot{y} - 2\dot{y}^2 + y^2 - xy - 2y$. Подберите преобразования сдвига и поворота, диагонализующее потенциальную энергию. Будет ли квадратичная форма, отвечающая кинетической энергии, диагональной? Напишите уравнения движения в двух системах и убедитесь в их ковариантности.

3. Если преобразование затрагивает не только координаты, но и время, преобразование функции Лагранжа не сводится к замене переменных, в отличие от действия. Найдите новую функцию Лагранжа, если в исходной системе $L = -\sqrt{1 - \dot{x}^2} + (x + 2t)^2$, а преобразования имеют вид $x = (5\xi - 3\tau)/4$, $t = (5\tau - 3\xi)/4$. Как преобразовываются скорость и ее производная? Составьте уравнения движения в двух системах и проверьте их ковариантность.

4. Для произвольной системы с одной степенью свободы проверьте, что преобразования координат и времени $x = -\xi + 2\tau$, $t = 4\tau\xi$ оставляют уравнения движения истинными, если в функции Лагранжа сделать замену переменных и умножить ее на производную $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau$.

5. Частным случаем преобразований координат является переход в неинерциальную систему отсчета. Получите уравнения движения частицы массой m, находящейся в поле $U(\mathbf{r})$, в неинерциальной системе отсчета, движущейся вдоль направления $(1, -4, -5)$ со скоростью, модуль которой $v(t) = t^2 + 6$.

6. Запишите функцию Лагранжа и уравнения движения частицы массой m, находящейся в поле $U(\mathbf{r})$, в неинерциальной системе отсчета, вращающейся вокруг оси y с угловой скоростью, модуль которой $\omega(t) = -t + 4t^2$. Используйте декартову систему координат.

7. Найдите правила, по которым преобразуются обобщенные импульсы и энергия системы с двумя степенями свободы при переходе к координатам ξ, η согласно соотношениям $x = \xi - t\eta$, $y = 2t\xi\eta$.

8. Рассмотрим двумерное движение точки массой m в поле $U(\mathbf{r})$. Переход к новой ортогональной системе координат задается квадратичной формой для элемента длины $\mathrm{d}s^2 = \xi\eta\mathrm{d}\xi^2 + \xi^2\mathrm{d}\eta^2$. Определим ускорение точки как отношение силы к ее массе, а сила определяется градиентом потенциальной энергии. Напишите уравнения движения в новой системе. Найдите ускорение точки.

9. При переходе от координат x, y к ξ, η обобщенные импульсы и энергия преобразуются по закону
$P_\xi = (\eta - 2t^2)P_x + \eta^2 P_y$, $P_\eta = \xi P_x + (2\xi\eta + \eta)P_y$, $\varepsilon = E + 4t\xi P_x$. Каким мог быть явный вид преобразований?

10. Учет сил трения или реакции связей в подходе Лагранжа осуществляется введением в правую часть уравнений Эйлера-Лагранжа соответствующих обобщенных сил R_i. Найдите эти силы в системе координат ξ, η, если в исходной системе x, y они имели вид $R_x = 4x(\dot{x}^2 + y^2)t$, $R_y = 3\dot{y}^3 - 3t^4$, а преобразования координат задаются соотношениями $x = \xi t + \eta t$, $y = 3\xi(\eta + t)$.

Домашнее задание №8

Преобразования координат.

Вариант 3

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = 2\dot{x}^2 - x\dot{y}^2 + xy - 4x$. Введем новые координаты согласно соотношениям $x = \xi + \eta$, $y = \xi\eta$. Составьте новую функцию Лагранжа. Напишите уравнения Эйлера-Лагранжа в исходной и в новой системах координат. Проверьте, что из справедливости первых следует справедливость вторых.

2. Функция Лагранжа системы $L = \dot{x}^2 + 2\dot{y}^2 + x^2 + 3xy - 3y^2 + 3x$. Подберите преобразования сдвига и поворота, диагонализующее потенциальную энергию. Будет ли квадратичная форма, отвечающая кинетической энергии, диагональной? Напишите уравнения движения в двух системах и убедитесь в их ковариантности.

3. Если преобразование затрагивает не только координаты, но и время, преобразование функции Лагранжа не сводится к замене переменных, в отличие от действия. Найдите новую функцию Лагранжа, если в исходной системе $L = \dot{x}^2 + (x + 2t)^2 + t$, а преобразования имеют вид $x = 2\xi$, $t = 2\tau - \xi$. Как преобразовываются скорость и ее производная? Составьте уравнения движения в двух системах и проверьте их ковариантность.

4. Для произвольной системы с одной степенью свободы проверьте, что преобразования координат и времени $x = \tau\xi$, $t = -\xi + \tau$ оставляют уравнения движения истинными, если в функции Лагранжа сделать замену переменных и умножить ее на производную $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau$.

5. Частным случаем преобразований координат является переход в неинерциальную систему отсчета. Получите уравнения движения частицы массой m, находящейся в поле $U(\mathbf{r})$, в неинерциальной системе отсчета, движущейся вдоль направления $(-2, 1, -2)$ со скоростью, модуль которой $v(t) = t^2 + 7\sin t$.

6. Запишите функцию Лагранжа и уравнения движения частицы массой m, находящейся в поле $U(\mathbf{r})$, в неинерциальной системе отсчета, вращающейся вокруг оси z с угловой скоростью, модуль которой $\omega(t) = -2t^2 + t^3$. Используйте декартову систему координат.

7. Найдите правила, по которым преобразуются обобщенные импульсы и энергия системы с двумя степенями свободы при переходе к координатам ξ, η согласно соотношениям $x = -t\xi + \eta$, $y = t^2\xi + 2\eta$.

8. Рассмотрим двумерное движение точки массой m в поле $U(\mathbf{r})$. Переход к новой ортогональной системе координат задается квадратичной формой для элемента длины $\mathrm{d}s^2 = \xi\eta\mathrm{d}\xi^2 + \sin^2\xi\mathrm{d}\eta^2$. Определим ускорение точки как отношение силы к ее массе, а сила определяется градиентом потенциальной энергии. Напишите уравнения движения в новой системе. Найдите ускорение точки.

9. При переходе от координат x, y к ξ, η обобщенные импульсы и энергия преобразуются по закону $P_\xi = (\eta - 2\xi^2)P_x + \eta^2 P_y$, $P_\eta = \xi P_x + (2\xi\eta + \eta + t^2)P_y$, $\varepsilon = E - 2t\eta P_y$. Каким мог быть явный вид преобразований?

10. Учет сил трения или реакции связей в подходе Лагранжа осуществляется введением в правую часть уравнений Эйлера-Лагранжа соответствующих обобщенных сил R_i. Найдите эти силы в системе координат ξ, η, если в исходной системе x, y они имели вид $R_x = -4\dot{x}^2 x - y^4 t$, $R_y = \dot{y} + 3\sin t$, а преобразования координат задаются соотношениями $x = \xi(t + \eta)$, $y = 3\xi + \eta$.

Домашнее задание №8

Преобразования координат.

Вариант 4

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = 4\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + xy^2$. Введем новые координаты согласно соотношениям $x = \xi + 2\eta$, $y = \xi\eta$. Составьте новую функцию Лагранжа. Напишите уравнения Эйлера-Лагранжа в исходной и в новой системах координат. Проверьте, что из справедливости первых следует справедливость вторых.

2. Функция Лагранжа системы $L = 2\dot{x}^2 - 2\dot{x}\dot{y} + 2\dot{y}^2 + x^2 + 4xy - 4x$. Подберите преобразования сдвига и поворота, диагонализующее потенциальную энергию. Будет ли квадратичная форма, отвечающая кинетической энергии, диагональной? Напишите уравнения движения в двух системах и убедитесь в их ковариантности.

3. Если преобразование затрагивает не только координаты, но и время, преобразование функции Лагранжа не сводится к замене переменных, в отличие от действия. Найдите новую функцию Лагранжа, если в исходной системе $L = -\sqrt{1 - \dot{x}^2} + 9(x - 2t)^2$, а преобразования имеют вид $x = (5\xi - 4\tau)/3$, $t = (5\tau - 4\xi)/3$. Как преобразовываются скорость и ее производная? Составьте уравнения движения в двух системах и проверьте их ковариантность.

4. Для произвольной системы с одной степенью свободы проверьте, что преобразования координат и времени $x = \xi - 2\tau$, $t = 2\tau\xi$ оставляют уравнения движения истинными, если в функции Лагранжа сделать замену переменных и умножить ее на производную $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau$.

5. Частным случаем преобразований координат является переход в неинерциальную систему отсчета. Получите уравнения движения частицы массой m, находящейся в поле $U(\mathbf{r})$, в неинерциальной системе отсчета, движущейся вдоль направления $(2, -3, -1)$ со скоростью, модуль которой $v(t) = 6t^2 + 4t$.

6. Запишите функцию Лагранжа и уравнения движения частицы массой m, находящейся в поле $U(\mathbf{r})$, в неинерциальной системе отсчета, вращающейся вокруг оси x с угловой скоростью, модуль которой $\omega(t) = -5 - t^3$. Используйте декартову систему координат.

7. Найдите правила, по которым преобразуются обобщенные импульсы и энергия системы с двумя степенями свободы при переходе к координатам ξ, η согласно соотношениям $x = 2t\xi\eta$, $y = \xi + 2t\eta$.

8. Рассмотрим двумерное движение точки массой m в поле $U(\mathbf{r})$. Переход к новой ортогональной системе координат задается квадратичной формой для элемента длины $\mathrm{d}s^2 = \eta^4 \mathrm{d}\xi^2 + 4\xi^2 \mathrm{d}\eta^2$. Определим ускорение точки как отношение силы к ее массе, а сила определяется градиентом потенциальной энергии. Напишите уравнения движения в новой системе. Найдите ускорение точки.

9. При переходе от координат x, y к ξ, η обобщенные импульсы и энергия преобразуются по закону $P_\xi = (\eta - 2\xi^2)P_x + \eta^2 P_y$, $P_\eta = (\xi + t^2)P_x + (2\xi\eta + \eta)P_y$, $\varepsilon = E - 2t\eta P_x$. Каким мог быть явный вид преобразований?

10. Учет сил трения или реакции связей в подходе Лагранжа осуществляется введением в правую часть уравнений Эйлера-Лагранжа соответствующих обобщенных сил R_i. Найдите эти силы в системе координат ξ, η, если в исходной системе x, y они имели вид $R_x = 5\dot{x}^3 x - y^2 t$, $R_y = \dot{y}^2 + 3t$, а преобразования координат задаются соотношениями $x = 2\xi t + \eta t^2$, $y = -\xi - \eta$.

Домашнее задание №8

Преобразования координат.

Вариант 5

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x}(\dot{x} - \dot{y}) - 2x^2 + y$. Введем новые координаты согласно соотношениям $x = \xi + \eta$, $y = -2\eta$. Составьте новую функцию Лагранжа. Напишите уравнения Эйлера-Лагранжа в исходной и в новой системах координат. Проверьте, что из справедливости первых следует справедливость вторых.

2. Функция Лагранжа системы $L = -\dot{x}^2 - \dot{y}^2 + \dot{x}\dot{y} + 2\dot{y}^2 - y^2 + 3xy + y$. Подберите преобразования сдвига и поворота, диагонализующее потенциальную энергию. Будет ли квадратичная форма, отвечающая кинетической энергии, диагональной? Напишите уравнения движения в двух системах и убедитесь в их ковариантности.

3. Если преобразование затрагивает не только координаты, но и время, преобразование функции Лагранжа не сводится к замене переменных, в отличие от действия. Найдите новую функцию Лагранжа, если в исходной системе $L = \dot{x}^2 + 2x^2 - xt + 3x$, а преобразования имеют вид $x = 2\xi$, $t = 2\tau - 3\xi$. Как преобразовываются скорость и ее производная? Составьте уравнения движения в двух системах и проверьте их ковариантность.

4. Для произвольной системы с одной степенью свободы проверьте, что преобразования координат и времени $x = \xi + \tau$, $t = \tau\xi^2$ оставляют уравнения движения истинными, если в функции Лагранжа сделать замену переменных и умножить ее на производную $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau$.

5. Частным случаем преобразований координат является переход в неинерциальную систему отсчета. Получите уравнения движения частицы массой m, находящейся в поле $U(\mathbf{r})$, в неинерциальной системе отсчета, движущейся вдоль направления $(-2, -3, 5)$ со скоростью, модуль которой $v(t) = 2t^3 + 4t$.

6. Запишите функцию Лагранжа и уравнения движения частицы массой m, находящейся в поле $U(\mathbf{r})$, в неинерциальной системе отсчета, вращающейся вокруг оси y с угловой скоростью, модуль которой $\omega(t) = t + t^3$. Используйте декартову систему координат.

7. Найдите правила, по которым преобразуются обобщенные импульсы и энергия системы с двумя степенями свободы при переходе к координатам ξ, η согласно соотношениям $x = -2\xi + t^2\eta$, $y = t^3\xi + \eta$.

8. Рассмотрим двумерное движение точки массой m в поле $U(\mathbf{r})$. Переход к новой ортогональной системе координат задается квадратичной формой для элемента длины $\mathrm{d}s^2 = 9\xi\eta\mathrm{d}\xi^2 + \eta^2\mathrm{d}\eta^2$. Определим ускорение точки как отношение силы к ее массе, а сила определяется градиентом потенциальной энергии. Напишите уравнения движения в новой системе. Найдите ускорение точки.

9. При переходе от координат x, y к ξ, η обобщенные импульсы и энергия преобразуются по закону $P_\xi = (\eta - 2\xi^2)P_x + (\eta^2 + 3t^2)P_y$, $P_\eta = \xi P_x + (2\xi\eta + \eta)P_y$, $\varepsilon = E - 6t\xi P_y$. Каким мог быть явный вид преобразований?

10. Учет сил трения или реакции связей в подходе Лагранжа осуществляется введением в правую часть уравнений Эйлера-Лагранжа соответствующих обобщенных сил R_i. Найдите эти силы в системе координат ξ, η, если в исходной системе x, y они имели вид $R_x = 5\dot{x}^2x + y^2t$, $R_y = -\dot{y}^3 + 3xy$, а преобразования координат задаются соотношениями $x = \xi t + \eta\xi$, $y = 3\xi - 2\eta$.

Домашнее задание №8

Преобразования координат.

Вариант 6

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = 2\dot{x}^2 - x\dot{y}^2 + x(y+3)$. Введем новые координаты согласно соотношениям $x = \xi - \eta$, $y = 2\xi\eta$. Составьте новую функцию Лагранжа. Напишите уравнения Эйлера-Лагранжа в исходной и в новой системах координат. Проверьте, что из справедливости первых следует справедливость вторых.

2. Функция Лагранжа системы $L = 2\dot{x}^2 - 2\dot{y}^2 - x^2 + 5xy + y$. Подберите преобразования сдвига и поворота, диагонализующее потенциальную энергию. Будет ли квадратичная форма, отвечающая кинетической энергии, диагональной? Напишите уравнения движения в двух системах и убедитесь в их ковариантности.

3. Если преобразование затрагивает не только координаты, но и время, преобразование функции Лагранжа не сводится к замене переменных, в отличие от действия. Найдите новую функцию Лагранжа, если в исходной системе $L = -\sqrt{1-\dot{x}^2} + (4x+t)^2$, а преобразования имеют вид $x = (13\xi - 5\tau)/12$, $t = (13\tau - 5\xi)/12$. Как преобразовываются скорость и ее производная? Составьте уравнения движения в двух системах и проверьте их ковариантность.

4. Для произвольной системы с одной степенью свободы проверьте, что преобразования координат и времени $x = \tau\xi$, $t = 2\xi - 2\tau$ оставляют уравнения движения истинными, если в функции Лагранжа сделать замену переменных и умножить ее на производную $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau$.

5. Частным случаем преобразований координат является переход в неинерциальную систему отсчета. Получите уравнения движения частицы массой m, находящейся в поле $U(\mathbf{r})$, в неинерциальной системе отсчета, движущейся вдоль направления $(-2, 0, -5)$ со скоростью, модуль которой $v(t) = -2t + 4$.

6. Запишите функцию Лагранжа и уравнения движения частицы массой m, находящейся в поле $U(\mathbf{r})$, в неинерциальной системе отсчета, вращающейся вокруг оси z с угловой скоростью, модуль которой $\omega(t) = t^3 - 5t$. Используйте декартову систему координат.

7. Найдите правила, по которым преобразуются обобщенные импульсы и энергия системы с двумя степенями свободы при переходе к координатам ξ, η согласно соотношениям $x = -\xi + 2t\eta$, $y = -t\xi + 3\eta$.

8. Рассмотрим двумерное движение точки массой m в поле $U(\mathbf{r})$. Переход к новой ортогональной системе координат задается квадратичной формой для элемента длины $\mathrm{d}s^2 = \xi^4\mathrm{d}\xi^2 + \xi^2\eta^2\mathrm{d}\eta^2$. Определим ускорение точки как отношение силы к ее массе, а сила определяется градиентом потенциальной энергии. Напишите уравнения движения в новой системе. Найдите ускорение точки.

9. При переходе от координат x, y к ξ, η обобщенные импульсы и энергия преобразуются по закону
$P_\xi = (2\eta - \xi^2)P_x + \eta^2 P_y$, $P_\eta = 2\xi P_x + (2\xi\eta + 3\sin\eta)P_y$, $\varepsilon = E + 4tP_x$. Каким мог быть явный вид преобразований?

10. Учет сил трения или реакции связей в подходе Лагранжа осуществляется введением в правую часть уравнений Эйлера-Лагранжа соответствующих обобщенных сил R_i. Найдите эти силы в системе координат ξ, η, если в исходной системе x, y они имели вид $R_x = 2\dot{x}^2xy^2$, $R_y = 2\dot{y} + xy$, а преобразования координат задаются соотношениями $x = \xi + \eta t$, $y = 3 + \xi - \eta$.

Домашнее задание №8

Преобразования координат.

Вариант 7

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = 2\dot{x}^2 + 2\dot{y}^2 - xy^2$. Введем новые координаты согласно соотношениям $x = \xi + \eta$, $y = 2\xi\eta$. Составьте новую функцию Лагранжа. Напишите уравнения Эйлера-Лагранжа в исходной и в новой системах координат. Проверьте, что из справедливости первых следует справедливость вторых.

2. Функция Лагранжа системы $L = -\dot{x}^2 + 2\dot{y}^2 - y^2 + 2xy + 3x^2 - x$. Подберите преобразования сдвига и поворота, диагонализующее потенциальную энергию. Будет ли квадратичная форма, отвечающая кинетической энергии, диагональной? Напишите уравнения движения в двух системах и убедитесь в их ковариантности.

3. Если преобразование затрагивает не только координаты, но и время, преобразование функции Лагранжа не сводится к замене переменных, в отличие от действия. Найдите новую функцию Лагранжа, если в исходной системе $L = \dot{x}^2 - (x-t)^2 + 3t$, а преобразования имеют вид $x = -2\xi$, $t = -\tau - 4\xi$. Как преобразовываются скорость и ее производная? Составьте уравнения движения в двух системах и проверьте их ковариантность.

4. Для произвольной системы с одной степенью свободы проверьте, что преобразования координат и времени $x = \tau\xi$, $t = -\xi - 2\tau$ оставляют уравнения движения истинными, если в функции Лагранжа сделать замену переменных и умножить ее на производную $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau$.

5. Частным случаем преобразований координат является переход в неинерциальную систему отсчета. Получите уравнения движения частицы массой m, находящейся в поле $U(\mathbf{r})$, в неинерциальной системе отсчета, движущейся вдоль направления $(-5, 1, 0)$ со скоростью, модуль которой $v(t) = -2t + 4t^4$.

6. Запишите функцию Лагранжа и уравнения движения частицы массой m, находящейся в поле $U(\mathbf{r})$, в неинерциальной системе отсчета, вращающейся вокруг оси x с угловой скоростью, модуль которой $\omega(t) = -t + 4t^5$. Используйте декартову систему координат.

7. Найдите правила, по которым преобразуются обобщенные импульсы и энергия системы с двумя степенями свободы при переходе к координатам ξ, η согласно соотношениям $x = 2\xi + 4t\eta$, $y = -t\xi - 2t^2\eta$.

8. Рассмотрим двумерное движение точки массой m в поле $U(\mathbf{r})$. Переход к новой ортогональной системе координат задается квадратичной формой для элемента длины $\mathrm{d}s^2 = 2\xi\eta\mathrm{d}\xi^2 + 4\xi^6\mathrm{d}\eta^2$. Определим ускорение точки как отношение силы к ее массе, а сила определяется градиентом потенциальной энергии. Напишите уравнения движения в новой системе. Найдите ускорение точки.

9. При переходе от координат x, y к ξ, η обобщенные импульсы и энергия преобразуются по закону
$P_\xi = 2(\eta - 3t^2)P_x + \eta^2 P_y$, $P_\eta = 2\xi P_x + (2\xi\eta + \eta)P_y$, $\varepsilon = E + 12t\xi P_x$. Каким мог быть явный вид преобразований?

10. Учет сил трения или реакции связей в подходе Лагранжа осуществляется введением в правую часть уравнений Эйлера-Лагранжа соответствующих обобщенных сил R_i. Найдите эти силы в системе координат ξ, η, если в исходной системе x, y они имели вид $R_x = 2\dot{x}^2xy^2 - t$, $R_y = \dot{y}^3 + 3$, а преобразования координат задаются соотношениями $x = \xi t + \eta$, $y = 3\xi\eta$.

Домашнее задание №8

Преобразования координат.

Вариант 8

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x}\dot{y} + 2\dot{x}^2 + x^2 - 2y$. Введем новые координаты согласно соотношениям $x = \xi + \eta$, $y = 3\eta$. Составьте новую функцию Лагранжа. Напишите уравнения Эйлера-Лагранжа в исходной и в новой системах координат. Проверьте, что из справедливости первых следует справедливость вторых.

2. Функция Лагранжа системы $L = \dot{x}^2 + 2\dot{y}^2 - y^2 + 2xy - 6x^2$. Подберите преобразования сдвига и поворота, диагонализующее потенциальную энергию. Будет ли квадратичная форма, отвечающая кинетической энергии, диагональной? Напишите уравнения движения в двух системах и убедитесь в их ковариантности.

3. Если преобразование затрагивает не только координаты, но и время, преобразование функции Лагранжа не сводится к замене переменных, в отличие от действия. Найдите новую функцию Лагранжа, если в исходной системе $L = -\sqrt{1 - \dot{x}^2} + 25(x + 2t)^2$, а преобразования имеют вид $x = (13\xi - 12\tau)/5$, $t = (13\tau - 12\xi)/5$. Как преобразовываются скорость и ее производная? Составьте уравнения движения в двух системах и проверьте их ковариантность.

4. Для произвольной системы с одной степенью свободы проверьте, что преобразования координат и времени $x = -\xi + 4\tau$, $t = -\tau\xi$ оставляют уравнения движения истинными, если в функции Лагранжа сделать замену переменных и умножить ее на производную $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau$.

5. Частным случаем преобразований координат является переход в неинерциальную систему отсчета. Получите уравнения движения частицы массой m, находящейся в поле $U(\mathbf{r})$, в неинерциальной системе отсчета, движущейся вдоль направления $(0, -6, -5)$ со скоростью, модуль которой $v(t) = t^2 + t + 4$.

6. Запишите функцию Лагранжа и уравнения движения частицы массой m, находящейся в поле $U(\mathbf{r})$, в неинерциальной системе отсчета, вращающейся вокруг оси y с угловой скоростью, модуль которой $\omega(t) = -t - t^3$. Используйте декартову систему координат.

7. Найдите правила, по которым преобразуются обобщенные импульсы и энергия системы с двумя степенями свободы при переходе к координатам ξ, η согласно соотношениям $x = -\xi - t\eta$, $y = 2t\xi\eta$.

8. Рассмотрим двумерное движение точки массой m в поле $U(\mathbf{r})$. Переход к новой ортогональной системе координат задается квадратичной формой для элемента длины $\mathrm{d}s^2 = 16\xi^2\eta^2\mathrm{d}\xi^2 + 9\eta^2\mathrm{d}\eta^2$. Определим ускорение точки как отношение силы к ее массе, а сила определяется градиентом потенциальной энергии. Напишите уравнения движения в новой системе. Найдите ускорение точки.

9. При переходе от координат x, y к ξ, η обобщенные импульсы и энергия преобразуются по закону $P_\xi = (3\eta - 2\xi^2)P_x + \eta^2 P_y$, $P_\eta = 3\xi P_x + (2\xi\eta + \eta + 2t^2)P_y$, $\varepsilon = E - 4t\eta P_y$. Каким мог быть явный вид преобразований?

10. Учет сил трения или реакции связей в подходе Лагранжа осуществляется введением в правую часть уравнений Эйлера-Лагранжа соответствующих обобщенных сил R_i. Найдите эти силы в системе координат ξ, η, если в исходной системе x, y они имели вид $R_x = 2\dot{x}^2 x + y^2 t^3$, $R_y = \dot{y} + 3x^3$, а преобразования координат задаются соотношениями $x = -\xi t + \eta$, $y = -8\xi\eta$.

Домашнее задание №8

Преобразования координат.

Вариант 9

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x}^2 + 2x\dot{y}^2 + xy + x$. Введем новые координаты согласно соотношениям $x = -2\xi + \eta$, $y = \xi\eta$. Составьте новую функцию Лагранжа. Напишите уравнения Эйлера-Лагранжа в исходной и в новой системах координат. Проверьте, что из справедливости первых следует справедливость вторых.

2. Функция Лагранжа системы $L = -\dot{x}^2 + 2\dot{y}^2 - 2y^2 + 2xy + x^2$. Подберите преобразования сдвига и поворота, диагонализующее потенциальную энергию. Будет ли квадратичная форма, отвечающая кинетической энергии, диагональной? Напишите уравнения движения в двух системах и убедитесь в их ковариантности.

3. Если преобразование затрагивает не только координаты, но и время, преобразование функции Лагранжа не сводится к замене переменных, в отличие от действия. Найдите новую функцию Лагранжа, если в исходной системе $L = \dot{x}^2 + 2x^2 - 2xt + x$, а преобразования имеют вид $x = -3\xi$, $t = 3\tau - 3\xi$. Как преобразовываются скорость и ее производная? Составьте уравнения движения в двух системах и проверьте их ковариантность.

4. Для произвольной системы с одной степенью свободы проверьте, что преобразования координат и времени $x = \xi + \tau$, $t = -\tau^2$ оставляют уравнения движения истинными, если в функции Лагранжа сделать замену переменных и умножить ее на производную $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau$.

5. Частным случаем преобразований координат является переход в неинерциальную систему отсчета. Получите уравнения движения частицы массой m, находящейся в поле $U(\mathbf{r})$, в неинерциальной системе отсчета, движущейся вдоль направления $(-2, 4, -5)$ со скоростью, модуль которой $v(t) = -t + 4$.

6. Запишите функцию Лагранжа и уравнения движения частицы массой m, находящейся в поле $U(\mathbf{r})$, в неинерциальной системе отсчета, вращающейся вокруг оси z с угловой скоростью, модуль которой $\omega(t) = -2 + t^4$. Используйте декартову систему координат.

7. Найдите правила, по которым преобразуются обобщенные импульсы и энергия системы с двумя степенями свободы при переходе к координатам ξ, η согласно соотношениям $x = -\xi\eta$, $y = t\xi + 4\eta$.

8. Рассмотрим двумерное движение точки массой m в поле $U(\mathbf{r})$. Переход к новой ортогональной системе координат задается квадратичной формой для элемента длины $\mathrm{d}s^2 = 4\xi^2\mathrm{d}\xi^2 + \xi\eta\mathrm{d}\eta^2$. Определим ускорение точки как отношение силы к ее массе, а сила определяется градиентом потенциальной энергии. Напишите уравнения движения в новой системе. Найдите ускорение точки.

9. При переходе от координат x, y к ξ, η обобщенные импульсы и энергия преобразуются по закону $P_\xi = (\eta - 2\xi^2)P_x - \eta^2 P_y$, $P_\eta = (\xi - t^3)P_x - (2\xi\eta + \sin\eta)P_y$, $\varepsilon = E + 3t^2\eta P_x$. Каким мог быть явный вид преобразований?

10. Учет сил трения или реакции связей в подходе Лагранжа осуществляется введением в правую часть уравнений Эйлера-Лагранжа соответствующих обобщенных сил R_i. Найдите эти силы в системе координат ξ, η, если в исходной системе x, y они имели вид $R_x = 4 + \dot{x}^2 xt$, $R_y = \dot{y}^2 x$, а преобразования координат задаются соотношениями $x = 2\xi\eta t$, $y = \xi - 3\eta$.

Домашнее задание №8

Преобразования координат.

Вариант 10

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = 4\dot{x}^2 + 2\dot{y}^2 - 3x^2y$. Введем новые координаты согласно соотношениям $x = \xi\eta$, $y = \xi + \eta$. Составьте новую функцию Лагранжа. Напишите уравнения Эйлера-Лагранжа в исходной и в новой системах координат. Проверьте, что из справедливости первых следует справедливость вторых.

2. Функция Лагранжа системы $L = -\dot{x}^2 + 2\dot{y}^2 + 3y^2 + 6xy + x^2$. Подберите преобразования сдвига и поворота, диагонализующее потенциальную энергию. Будет ли квадратичная форма, отвечающая кинетической энергии, диагональной? Напишите уравнения движения в двух системах и убедитесь в их ковариантности.

3. Если преобразование затрагивает не только координаты, но и время, преобразование функции Лагранжа не сводится к замене переменных, в отличие от действия. Найдите новую функцию Лагранжа, если в исходной системе $L = -\sqrt{1-\dot{x}^2} + 16(x+t)^2$, а преобразования имеют вид $x = (5\xi + 3\tau)/4$, $t = (5\tau + 3\xi)/4$. Как преобразовываются скорость и ее производная? Составьте уравнения движения в двух системах и проверьте их ковариантность.

4. Для произвольной системы с одной степенью свободы проверьте, что преобразования координат и времени $x = 2\xi + \tau$, $t = \xi^2$ оставляют уравнения движения истинными, если в функции Лагранжа сделать замену переменных и умножить ее на производную $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau$.

5. Частным случаем преобразований координат является переход в неинерциальную систему отсчета. Получите уравнения движения частицы массой m, находящейся в поле $U(\mathbf{r})$, в неинерциальной системе отсчета, движущейся вдоль направления $(6, 0, -5)$ со скоростью, модуль которой $v(t) = 5 - 2t + 4t^2$.

6. Запишите функцию Лагранжа и уравнения движения частицы массой m, находящейся в поле $U(\mathbf{r})$, в неинерциальной системе отсчета, вращающейся вокруг оси x с угловой скоростью, модуль которой $\omega(t) = 5t + 4t^6$. Используйте декартову систему координат.

7. Найдите правила, по которым преобразуются обобщенные импульсы и энергия системы с двумя степенями свободы при переходе к координатам ξ, η согласно соотношениям $x = -2\xi + 2t\eta$, $y = 3\xi + t\eta$.

8. Рассмотрим двумерное движение точки массой m в поле $U(\mathbf{r})$. Переход к новой ортогональной системе координат задается квадратичной формой для элемента длины $\mathrm{d}s^2 = 4\eta^2\mathrm{d}\xi^2 + \xi^2\eta\mathrm{d}\eta^2$. Определим ускорение точки как отношение силы к ее массе, а сила определяется градиентом потенциальной энергии. Напишите уравнения движения в новой системе. Найдите ускорение точки.

9. При переходе от координат x, y к ξ, η обобщенные импульсы и энергия преобразуются по закону $P_\xi = 2(\eta - 2\xi^2)P_x + (\eta^2 - 6t^2)P_y$, $P_\eta = 2\xi P_x + (2\xi\eta + \eta)P_y$, $\varepsilon = E + 12t\xi P_y$. Каким мог быть явный вид преобразований?

10. Учет сил трения или реакции связей в подходе Лагранжа осуществляется введением в правую часть уравнений Эйлера-Лагранжа соответствующих обобщенных сил R_i. Найдите эти силы в системе координат ξ, η, если в исходной системе x, y они имели вид $R_x = -\dot{x}^2x - y^4t$, $R_y = 3x - \dot{y}^4$, а преобразования координат задаются соотношениями $x = \xi t + 2\eta$, $y = 3\xi - \eta$.

Домашнее задание №8

Преобразования координат.

Вариант 11

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x}^2 - \dot{x}\dot{y} - x^2 - y$. Введем новые координаты согласно соотношениям $x = -2\xi - \eta$, $y = -\eta$. Составьте новую функцию Лагранжа. Напишите уравнения Эйлера-Лагранжа в исходной и в новой системах координат. Проверьте, что из справедливости первых следует справедливость вторых.

2. Функция Лагранжа системы $L = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2y^2 + 2xy - 3x^2$. Подберите преобразования сдвига и поворота, диагонализующее потенциальную энергию. Будет ли квадратичная форма, отвечающая кинетической энергии, диагональной? Напишите уравнения движения в двух системах и убедитесь в их ковариантности.

3. Если преобразование затрагивает не только координаты, но и время, преобразование функции Лагранжа не сводится к замене переменных, в отличие от действия. Найдите новую функцию Лагранжа, если в исходной системе $L = \dot{x}^2 + 2(x+t)^2 + 4t^2$, а преобразования имеют вид $x = 4\xi$, $t = -2\tau - \xi$. Как преобразовываются скорость и ее производная? Составьте уравнения движения в двух системах и проверьте их ковариантность.

4. Для произвольной системы с одной степенью свободы проверьте, что преобразования координат и времени $x = -\xi - \tau$, $t = 2\tau^3$ оставляют уравнения движения истинными, если в функции Лагранжа сделать замену переменных и умножить ее на производную $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau$.

5. Частным случаем преобразований координат является переход в неинерциальную систему отсчета. Получите уравнения движения частицы массой m, находящейся в поле $U(\mathbf{r})$, в неинерциальной системе отсчета, движущейся вдоль направления $(-2, 5, 0)$ со скоростью, модуль которой $v(t) = -2 + t^2$.

6. Запишите функцию Лагранжа и уравнения движения частицы массой m, находящейся в поле $U(\mathbf{r})$, в неинерциальной системе отсчета, вращающейся вокруг оси y с угловой скоростью, модуль которой $\omega(t) = -t^3 + 2t$. Используйте декартову систему координат.

7. Найдите правила, по которым преобразуются обобщенные импульсы и энергия системы с двумя степенями свободы при переходе к координатам ξ, η согласно соотношениям $x = 3t\xi - 2\eta$, $y = -t\xi + \eta$.

8. Рассмотрим двумерное движение точки массой m в поле $U(\mathbf{r})$. Переход к новой ортогональной системе координат задается квадратичной формой для элемента длины $\mathrm{d}s^2 = 9\xi\eta\mathrm{d}\xi^2 + 4\xi^3\mathrm{d}\eta^2$. Определим ускорение точки как отношение силы к ее массе, а сила определяется градиентом потенциальной энергии. Напишите уравнения движения в новой системе. Найдите ускорение точки.

9. При переходе от координат x, y к ξ, η обобщенные импульсы и энергия преобразуются по закону
$P_\xi = (\eta - \sin\xi)P_x - 2\eta^2 P_y$, $P_\eta = \xi P_x - (4\xi\eta + \eta)P_y$, $\varepsilon = E + 4tP_x$. Каким мог быть явный вид преобразований?

10. Учет сил трения или реакции связей в подходе Лагранжа осуществляется введением в правую часть уравнений Эйлера-Лагранжа соответствующих обобщенных сил R_i. Найдите эти силы в системе координат ξ, η, если в исходной системе x, y они имели вид $R_x = 2\dot{x}^2 x + y^2 t$, $R_y = \dot{y}^3 + 3$, а преобразования координат задаются соотношениями $x = \xi - \eta t^2$, $y = 3\xi^2 - \eta$.

Домашнее задание №8

Преобразования координат.

Вариант 12

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = -2\dot{x}^2 + x\dot{y}^2 - xy + 2x$. Введем новые координаты согласно соотношениям $x = \xi + \eta$, $y = \xi\eta$. Составьте новую функцию Лагранжа. Напишите уравнения Эйлера-Лагранжа в исходной и в новой системах координат. Проверьте, что из справедливости первых следует справедливость вторых.

2. Функция Лагранжа системы $L = 2\dot{x}^2 + 6\dot{y}^2 - 4y^2 + 6xy - x^2$. Подберите преобразования сдвига и поворота, диагонализующее потенциальную энергию. Будет ли квадратичная форма, отвечающая кинетической энергии, диагональной? Напишите уравнения движения в двух системах и убедитесь в их ковариантности.

3. Если преобразование затрагивает не только координаты, но и время, преобразование функции Лагранжа не сводится к замене переменных, в отличие от действия. Найдите новую функцию Лагранжа, если в исходной системе $L = -\sqrt{1 - \dot{x}^2} + 27(x - t)^2$, а преобразования имеют вид $x = (5\xi + 4\tau)/3$, $t = (5\tau + 4\xi)/3$. Как преобразовываются скорость и ее производная? Составьте уравнения движения в двух системах и проверьте их ковариантность.

4. Для произвольной системы с одной степенью свободы проверьте, что преобразования координат и времени $x = -\xi + \tau$, $t = 4\xi^3$ оставляют уравнения движения истинными, если в функции Лагранжа сделать замену переменных и умножить ее на производную $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau$.

5. Частным случаем преобразований координат является переход в неинерциальную систему отсчета. Получите уравнения движения частицы массой m, находящейся в поле $U(\mathbf{r})$, в неинерциальной системе отсчета, движущейся вдоль направления $(0, -4, 1)$ со скоростью, модуль которой $v(t) = t + 4t^4$.

6. Запишите функцию Лагранжа и уравнения движения частицы массой m, находящейся в поле $U(\mathbf{r})$, в неинерциальной системе отсчета, вращающейся вокруг оси z с угловой скоростью, модуль которой $\omega(t) = -6t^9$. Используйте декартову систему координат.

7. Найдите правила, по которым преобразуются обобщенные импульсы и энергия системы с двумя степенями свободы при переходе к координатам ξ, η согласно соотношениям $x = 4\xi + t^2\eta$, $y = t\xi - 2\eta$.

8. Рассмотрим двумерное движение точки массой m в поле $U(\mathbf{r})$. Переход к новой ортогональной системе координат задается квадратичной формой для элемента длины $\mathrm{d}s^2 = 9\xi\eta^2\mathrm{d}\xi^2 + \xi^2\mathrm{d}\eta^2$. Определим ускорение точки как отношение силы к ее массе, а сила определяется градиентом потенциальной энергии. Напишите уравнения движения в новой системе. Найдите ускорение точки.

9. При переходе от координат x, y к ξ, η обобщенные импульсы и энергия преобразуются по закону
$P_\xi = (\eta - 2t^2)P_x + 2\eta^2 P_y$, $P_\eta = \xi P_x + (4\xi\eta + \eta)P_y$, $\varepsilon = E + 4t\xi P_x$. Каким мог быть явный вид преобразований?

10. Учет сил трения или реакции связей в подходе Лагранжа осуществляется введением в правую часть уравнений Эйлера-Лагранжа соответствующих обобщенных сил R_i. Найдите эти силы в системе координат ξ, η, если в исходной системе x, y они имели вид $R_x = 2\dot{x}^2 x + y^2 t$, $R_y = \dot{y}^3 + 3$, а преобразования координат задаются соотношениями $x = \xi\eta t$, $y = \xi - \eta^2$.

Домашнее задание №8

Преобразования координат.

Вариант 13

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = 4\dot{x}^2 + 2\dot{y}^2 + xy^2$. Введем новые координаты согласно соотношениям $x = \xi\eta$, $y = \xi - \eta$. Составьте новую функцию Лагранжа. Напишите уравнения Эйлера-Лагранжа в исходной и в новой системах координат. Проверьте, что из справедливости первых следует справедливость вторых.

2. Функция Лагранжа системы $L = 2\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2y^2 - x^2 + 4xy$. Подберите преобразования сдвига и поворота, диагонализующее потенциальную энергию. Будет ли квадратичная форма, отвечающая кинетической энергии, диагональной? Напишите уравнения движения в двух системах и убедитесь в их ковариантности.

3. Если преобразование затрагивает не только координаты, но и время, преобразование функции Лагранжа не сводится к замене переменных, в отличие от действия. Найдите новую функцию Лагранжа, если в исходной системе $L = 4\dot{x}^2 + 2x^2 - xt + 4x$, а преобразования имеют вид $x = -3\xi$, $t = -\tau - \xi$. Как преобразовываются скорость и ее производная? Составьте уравнения движения в двух системах и проверьте их ковариантность.

4. Для произвольной системы с одной степенью свободы проверьте, что преобразования координат и времени $x = -\xi + 2\tau$, $t = 2\tau\xi$ оставляют уравнения движения истинными, если в функции Лагранжа сделать замену переменных и умножить ее на производную $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau$.

5. Частным случаем преобразований координат является переход в неинерциальную систему отсчета. Получите уравнения движения частицы массой m, находящейся в поле $U(\mathbf{r})$, в неинерциальной системе отсчета, движущейся вдоль направления $(-2, 0, -5)$ со скоростью, модуль которой $v(t) = -2t + 4$.

6. Запишите функцию Лагранжа и уравнения движения частицы массой m, находящейся в поле $U(\mathbf{r})$, в неинерциальной системе отсчета, вращающейся вокруг оси x с угловой скоростью, модуль которой $\omega(t) = -t^3 - 5$. Используйте декартову систему координат.

7. Найдите правила, по которым преобразуются обобщенные импульсы и энергия системы с двумя степенями свободы при переходе к координатам ξ, η согласно соотношениям $x = -2\xi + t^4\eta$, $y = t^3\xi + 2\eta$.

8. Рассмотрим двумерное движение точки массой m в поле $U(\mathbf{r})$. Переход к новой ортогональной системе координат задается квадратичной формой для элемента длины $\mathrm{d}s^2 = 2\xi^2\eta^4\mathrm{d}\xi^2 + \xi^2\mathrm{d}\eta^2$. Определим ускорение точки как отношение силы к ее массе, а сила определяется градиентом потенциальной энергии. Напишите уравнения движения в новой системе. Найдите ускорение точки.

9. При переходе от координат x, y к ξ, η обобщенные импульсы и энергия преобразуются по закону $P_\xi = (\eta - 2\sin\xi)P_x + \eta^2 P_y$, $P_\eta = \xi P_x + (2\xi\eta + \eta - t^2)P_y$, $\varepsilon = E + 2t\eta P_y$. Каким мог быть явный вид преобразований?

10. Учет сил трения или реакции связей в подходе Лагранжа осуществляется введением в правую часть уравнений Эйлера-Лагранжа соответствующих обобщенных сил R_i. Найдите эти силы в системе координат ξ, η, если в исходной системе x, y они имели вид $R_x = 2\dot{x}^2 y + tx$, $R_y = \dot{y}^3 + 3$, а преобразования координат задаются соотношениями $x = \xi t + \eta$, $y = \xi^2\eta$.

Домашнее задание №8

Преобразования координат.

Вариант 14

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x}\dot{y} + \dot{y}^2 - y + 2x^2$. Введем новые координаты согласно соотношениям $x = -2\eta$, $y = 2\xi + \eta$. Составьте новую функцию Лагранжа. Напишите уравнения Эйлера-Лагранжа в исходной и в новой системах координат. Проверьте, что из справедливости первых следует справедливость вторых.

2. Функция Лагранжа системы $L = 2\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2y^2 - 2xy - 2x^2$. Подберите преобразования сдвига и поворота, диагонализующее потенциальную энергию. Будет ли квадратичная форма, отвечающая кинетической энергии, диагональной? Напишите уравнения движения в двух системах и убедитесь в их ковариантности.

3. Если преобразование затрагивает не только координаты, но и время, преобразование функции Лагранжа не сводится к замене переменных, в отличие от действия. Найдите новую функцию Лагранжа, если в исходной системе $L = -\sqrt{1-\dot{x}^2} + 12(x+2t)^2$, а преобразования имеют вид $x = (13\xi + 5\tau)/12$, $t = (13\tau + 5\xi)/12$. Как преобразовываются скорость и ее производная? Составьте уравнения движения в двух системах и проверьте их ковариантность.

4. Для произвольной системы с одной степенью свободы проверьте, что преобразования координат и времени $x = -\xi + \tau$, $t = -5\tau^2$ оставляют уравнения движения истинными, если в функции Лагранжа сделать замену переменных и умножить ее на производную $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau$.

5. Частным случаем преобразований координат является переход в неинерциальную систему отсчета. Получите уравнения движения частицы массой m, находящейся в поле $U(\mathbf{r})$, в неинерциальной системе отсчета, движущейся вдоль направления $(0, 3, -2)$ со скоростью, модуль которой $v(t) = -2\cos t$.

6. Запишите функцию Лагранжа и уравнения движения частицы массой m, находящейся в поле $U(\mathbf{r})$, в неинерциальной системе отсчета, вращающейся вокруг оси y с угловой скоростью, модуль которой $\omega(t) = -5 + 4t$. Используйте декартову систему координат.

7. Найдите правила, по которым преобразуются обобщенные импульсы и энергия системы с двумя степенями свободы при переходе к координатам ξ, η согласно соотношениям $x = -2t\xi\eta$, $y = 2t\xi + 2\eta$.

8. Рассмотрим двумерное движение точки массой m в поле $U(\mathbf{r})$. Переход к новой ортогональной системе координат задается квадратичной формой для элемента длины $\mathrm{d}s^2 = 25\xi\eta\mathrm{d}\xi^2 + \xi^4\mathrm{d}\eta^2$. Определим ускорение точки как отношение силы к ее массе, а сила определяется градиентом потенциальной энергии. Напишите уравнения движения в новой системе. Найдите ускорение точки.

9. При переходе от координат x, y к ξ, η обобщенные импульсы и энергия преобразуются по закону
$P_\xi = (2\eta - 2\xi^2)P_x + \eta^2 P_y$, $P_\eta = (2\xi + 4t^2)P_x + (2\xi\eta + \eta^2)P_y$, $\varepsilon = E - 8t\eta P_x$. Каким мог быть явный вид преобразований?

10. Учет сил трения или реакции связей в подходе Лагранжа осуществляется введением в правую часть уравнений Эйлера-Лагранжа соответствующих обобщенных сил R_i. Найдите эти силы в системе координат ξ, η, если в исходной системе x, y они имели вид $R_x = 4\dot{x}^2x^2 + y^2t$, $R_y = \dot{y}^3 + 3$, а преобразования координат задаются соотношениями $x = (\xi + \eta)t^3$, $y = 3\xi\eta$.

Домашнее задание №8

Преобразования координат.

Вариант 15

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = 3\dot{x}^2 + x\dot{y}^2 + xy + 4x$. Введем новые координаты согласно соотношениям $x = -\xi + \eta$, $y = -2\xi\eta$. Составьте новую функцию Лагранжа. Напишите уравнения Эйлера-Лагранжа в исходной и в новой системах координат. Проверьте, что из справедливости первых следует справедливость вторых.

2. Функция Лагранжа системы $L = \dot{x}^2 + 2\dot{y}^2 - 4y^2 + 8xy + x^2$. Подберите преобразования сдвига и поворота, диагонализующее потенциальную энергию. Будет ли квадратичная форма, отвечающая кинетической энергии, диагональной? Напишите уравнения движения в двух системах и убедитесь в их ковариантности.

3. Если преобразование затрагивает не только координаты, но и время, преобразование функции Лагранжа не сводится к замене переменных, в отличие от действия. Найдите новую функцию Лагранжа, если в исходной системе $L = \dot{x}^2 + 2(-x + t)^2 + 4t^2$, а преобразования имеют вид $x = \xi$, $t = -4\tau - 3\xi$. Как преобразовываются скорость и ее производная? Составьте уравнения движения в двух системах и проверьте их ковариантность.

4. Для произвольной системы с одной степенью свободы проверьте, что преобразования координат и времени $x = -\xi - \tau$, $t = \tau^3$ оставляют уравнения движения истинными, если в функции Лагранжа сделать замену переменных и умножить ее на производную $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau$.

5. Частным случаем преобразований координат является переход в неинерциальную систему отсчета. Получите уравнения движения частицы массой m, находящейся в поле $U(\mathbf{r})$, в неинерциальной системе отсчета, движущейся вдоль направления $(1, 1, -3)$ со скоростью, модуль которой $v(t) = -2t + 4t^6$.

6. Запишите функцию Лагранжа и уравнения движения частицы массой m, находящейся в поле $U(\mathbf{r})$, в неинерциальной системе отсчета, вращающейся вокруг оси z с угловой скоростью, модуль которой $\omega(t) = 4\sin t$. Используйте декартову систему координат.

7. Найдите правила, по которым преобразуются обобщенные импульсы и энергия системы с двумя степенями свободы при переходе к координатам ξ, η согласно соотношениям $x = \xi + t\eta$, $y = -2t\xi\eta$.

8. Рассмотрим двумерное движение точки массой m в поле $U(\mathbf{r})$. Переход к новой ортогональной системе координат задается квадратичной формой для элемента длины $\mathrm{d}s^2 = \xi^4\mathrm{d}\xi^2 + 25\eta^2\mathrm{d}\eta^2$. Определим ускорение точки как отношение силы к ее массе, а сила определяется градиентом потенциальной энергии. Напишите уравнения движения в новой системе. Найдите ускорение точки.

9. При переходе от координат x, y к ξ, η обобщенные импульсы и энергия преобразуются по закону $P_\xi = (\eta - 2\sin\xi)P_x + (3\eta^2 + 3t^2)P_y$, $P_\eta = \xi P_x + (6\xi\eta + \eta)P_y$, $\varepsilon = E - 6t\xi P_y$. Каким мог быть явный вид преобразований?

10. Учет сил трения или реакции связей в подходе Лагранжа осуществляется введением в правую часть уравнений Эйлера-Лагранжа соответствующих обобщенных сил R_i. Найдите эти силы в системе координат ξ, η, если в исходной системе x, y они имели вид $R_x = -4\dot{x}^2x + y^3t$, $R_y = \dot{y}^3 + 3$, а преобразования координат задаются соотношениями $x = 2\xi + \eta t$, $y = \xi - \eta$.

Домашнее задание №8

Преобразования координат.

Вариант 16

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 4xy^2$. Введем новые координаты согласно соотношениям $x = 2\xi + \eta$, $y = -\xi\eta$. Составьте новую функцию Лагранжа. Напишите уравнения Эйлера-Лагранжа в исходной и в новой системах координат. Проверьте, что из справедливости первых следует справедливость вторых.

2. Функция Лагранжа системы $L = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 3y^2 + xy - 2x^2$. Подберите преобразования сдвига и поворота, диагонализующее потенциальную энергию. Будет ли квадратичная форма, отвечающая кинетической энергии, диагональной? Напишите уравнения движения в двух системах и убедитесь в их ковариантности.

3. Если преобразование затрагивает не только координаты, но и время, преобразование функции Лагранжа не сводится к замене переменных, в отличие от действия. Найдите новую функцию Лагранжа, если в исходной системе $L = -\sqrt{1 - \dot{x}^2} + 5(x + 2t)^2$, а преобразования имеют вид $x = (13\xi + 12\tau)/5$, $t = (13\tau + 12\xi)/5$. Как преобразовываются скорость и ее производная? Составьте уравнения движения в двух системах и проверьте их ковариантность.

4. Для произвольной системы с одной степенью свободы проверьте, что преобразования координат и времени $x = \xi + \tau$, $t = \xi^4$ оставляют уравнения движения истинными, если в функции Лагранжа сделать замену переменных и умножить ее на производную $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau$.

5. Частным случаем преобразований координат является переход в неинерциальную систему отсчета. Получите уравнения движения частицы массой m, находящейся в поле $U(\mathbf{r})$, в неинерциальной системе отсчета, движущейся вдоль направления $(0, -3, -5)$ со скоростью, модуль которой $v(t) = 5t + 4t^4$.

6. Запишите функцию Лагранжа и уравнения движения частицы массой m, находящейся в поле $U(\mathbf{r})$, в неинерциальной системе отсчета, вращающейся вокруг оси x с угловой скоростью, модуль которой $\omega(t) = -2t^8$. Используйте декартову систему координат.

7. Найдите правила, по которым преобразуются обобщенные импульсы и энергия системы с двумя степенями свободы при переходе к координатам ξ, η согласно соотношениям $x = \xi + t\eta$, $y = t\xi + 2t\eta$.

8. Рассмотрим двумерное движение точки массой m в поле $U(\mathbf{r})$. Переход к новой ортогональной системе координат задается квадратичной формой для элемента длины $\mathrm{d}s^2 = \xi\eta \mathrm{d}\xi^2 + 4\xi^2\eta \mathrm{d}\eta^2$. Определим ускорение точки как отношение силы к ее массе, а сила определяется градиентом потенциальной энергии. Напишите уравнения движения в новой системе. Найдите ускорение точки.

9. При переходе от координат x, y к ξ, η обобщенные импульсы и энергия преобразуются по закону $P_\xi = (3\eta - \xi^2)P_x + \eta^2 P_y$, $P_\eta = 3\xi P_x + (2\xi\eta + 4\eta^2)P_y$, $\varepsilon = E + 4tP_x$. Каким мог быть явный вид преобразований?

10. Учет сил трения или реакции связей в подходе Лагранжа осуществляется введением в правую часть уравнений Эйлера-Лагранжа соответствующих обобщенных сил R_i. Найдите эти силы в системе координат ξ, η, если в исходной системе x, y они имели вид $R_x = 2\dot{x}^2 x + y^2 t$, $R_y = \dot{y}y + 4$, а преобразования координат задаются соотношениями $x = \xi t + \eta^2$, $y = \xi\eta^2$.

Домашнее задание №8

Преобразования координат.

Вариант 17

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x}^2 - \dot{x}\dot{y} + 4x^2 - y$. Введем новые координаты согласно соотношениям $x = 2\xi - \eta$, $y = \eta$. Составьте новую функцию Лагранжа. Напишите уравнения Эйлера-Лагранжа в исходной и в новой системах координат. Проверьте, что из справедливости первых следует справедливость вторых.

2. Функция Лагранжа системы $L = -2\dot{x}^2 + 2\dot{y}^2 - 4y^2 + 16xy - 3x^2$. Подберите преобразования сдвига и поворота, диагонализующее потенциальную энергию. Будет ли квадратичная форма, отвечающая кинетической энергии, диагональной? Напишите уравнения движения в двух системах и убедитесь в их ковариантности.

3. Если преобразование затрагивает не только координаты, но и время, преобразование функции Лагранжа не сводится к замене переменных, в отличие от действия. Найдите новую функцию Лагранжа, если в исходной системе $L = 3\dot{x}^2 + (x + 2t)^2 + 2x^2$, а преобразования имеют вид $x = -4\xi$, $t = 2\tau - \xi$. Как преобразовываются скорость и ее производная? Составьте уравнения движения в двух системах и проверьте их ковариантность.

4. Для произвольной системы с одной степенью свободы проверьте, что преобразования координат и времени $x = 2\tau\xi$, $t = -\xi + \tau$ оставляют уравнения движения истинными, если в функции Лагранжа сделать замену переменных и умножить ее на производную $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau$.

5. Частным случаем преобразований координат является переход в неинерциальную систему отсчета. Получите уравнения движения частицы массой m, находящейся в поле $U(\mathbf{r})$, в неинерциальной системе отсчета, движущейся вдоль направления $(-2, 0, 1)$ со скоростью, модуль которой $v(t) = -4t^5 + 4$.

6. Запишите функцию Лагранжа и уравнения движения частицы массой m, находящейся в поле $U(\mathbf{r})$, в неинерциальной системе отсчета, вращающейся вокруг оси y с угловой скоростью, модуль которой $\omega(t) = -t - 2t^2$. Используйте декартову систему координат.

7. Найдите правила, по которым преобразуются обобщенные импульсы и энергия системы с двумя степенями свободы при переходе к координатам ξ, η согласно соотношениям $x = \xi + t\eta$, $y = 2t\xi + 2\eta + t^2$.

8. Рассмотрим двумерное движение точки массой m в поле $U(\mathbf{r})$. Переход к новой ортогональной системе координат задается квадратичной формой для элемента длины $\mathrm{d}s^2 = \xi^3\mathrm{d}\xi^2 + \xi^2\eta\mathrm{d}\eta^2$. Определим ускорение точки как отношение силы к ее массе, а сила определяется градиентом потенциальной энергии. Напишите уравнения движения в новой системе. Найдите ускорение точки.

9. При переходе от координат x, y к ξ, η обобщенные импульсы и энергия преобразуются по закону
$P_\xi = -3(\eta - 2t^2)P_x + \eta^2 P_y$, $P_\eta = -3\xi P_x + (2\xi\eta + \eta)P_y$, $\varepsilon = E - 12t\xi P_x$. Каким мог быть явный вид преобразований?

10. Учет сил трения или реакции связей в подходе Лагранжа осуществляется введением в правую часть уравнений Эйлера-Лагранжа соответствующих обобщенных сил R_i. Найдите эти силы в системе координат ξ, η, если в исходной системе x, y они имели вид $R_x = 2\dot{x}xy + y^2 t$, $R_y = \dot{y} - 5$, а преобразования координат задаются соотношениями $x = \xi t + \eta$, $y = 3\xi^3 - \eta$.

Домашнее задание №8

Преобразования координат.

Вариант 18

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = -\dot{x}^2 + x\dot{y}^2 + 3xy - 4x$. Введем новые координаты согласно соотношениям $x = \xi + \eta$, $y = 2\xi\eta$. Составьте новую функцию Лагранжа. Напишите уравнения Эйлера-Лагранжа в исходной и в новой системах координат. Проверьте, что из справедливости первых следует справедливость вторых.

2. Функция Лагранжа системы $L = \dot{x}^2 + 2\dot{y}^2 - 2y^2 - 2xy - x^2 - 3x$. Подберите преобразования сдвига и поворота, диагонализующее потенциальную энергию. Будет ли квадратичная форма, отвечающая кинетической энергии, диагональной? Напишите уравнения движения в двух системах и убедитесь в их ковариантности.

3. Если преобразование затрагивает не только координаты, но и время, преобразование функции Лагранжа не сводится к замене переменных, в отличие от действия. Найдите новую функцию Лагранжа, если в исходной системе $L = -\sqrt{1-\dot{x}^2} + (x+t)^2/4$, а преобразования имеют вид $x = 10\xi - 6\tau$, $t = 10\tau - 6\xi$. Как преобразовываются скорость и ее производная? Составьте уравнения движения в двух системах и проверьте их ковариантность.

4. Для произвольной системы с одной степенью свободы проверьте, что преобразования координат и времени $x = \tau^4$, $t = -\xi + 2\tau$ оставляют уравнения движения истинными, если в функции Лагранжа сделать замену переменных и умножить ее на производную $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau$.

5. Частным случаем преобразований координат является переход в неинерциальную систему отсчета. Получите уравнения движения частицы массой m, находящейся в поле $U(\mathbf{r})$, в неинерциальной системе отсчета, движущейся вдоль направления $(-2, -1, -5)$ со скоростью, модуль которой $v(t) = t + 4t^2$.

6. Запишите функцию Лагранжа и уравнения движения частицы массой m, находящейся в поле $U(\mathbf{r})$, в неинерциальной системе отсчета, вращающейся вокруг оси z с угловой скоростью, модуль которой $\omega(t) = 4t^3 + 1$. Используйте декартову систему координат.

7. Найдите правила, по которым преобразуются обобщенные импульсы и энергия системы с двумя степенями свободы при переходе к координатам ξ, η согласно соотношениям $x = \xi + t\eta$, $y = t(\xi - 2\eta)$.

8. Рассмотрим двумерное движение точки массой m в поле $U(\mathbf{r})$. Переход к новой ортогональной системе координат задается квадратичной формой для элемента длины $\mathrm{d}s^2 = \xi^5\mathrm{d}\xi^2 + 4\xi^2\eta\mathrm{d}\eta^2$. Определим ускорение точки как отношение силы к ее массе, а сила определяется градиентом потенциальной энергии. Напишите уравнения движения в новой системе. Найдите ускорение точки.

9. При переходе от координат x, y к ξ, η обобщенные импульсы и энергия преобразуются по закону $P_\xi = (\eta + 5\xi^4)P_x - 3\eta^2 P_y$, $P_\eta = \xi P_x - (6\xi\eta + \eta + t^2)P_y$, $\varepsilon = E + 2t\eta P_y$. Каким мог быть явный вид преобразований?

10. Учет сил трения или реакции связей в подходе Лагранжа осуществляется введением в правую часть уравнений Эйлера-Лагранжа соответствующих обобщенных сил R_i. Найдите эти силы в системе координат ξ, η, если в исходной системе x, y они имели вид $R_x = 5\dot{x}^2 x + y^2 t^2$, $R_y = \dot{y}^2 + 3$, а преобразования координат задаются соотношениями $x = \xi t + \eta$, $y = \xi\eta$.

Домашнее задание №8

Преобразования координат.

Вариант 19

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = 4\dot{x}^2 + 2\dot{y}^2 - xy^2$. Введем новые координаты согласно соотношениям $x = 2\xi + \eta$, $y = -\xi\eta$. Составьте новую функцию Лагранжа. Напишите уравнения Эйлера-Лагранжа в исходной и в новой системах координат. Проверьте, что из справедливости первых следует справедливость вторых.

2. Функция Лагранжа системы $L = \dot{x}^2 - 2\dot{y}^2 - 2y^2 - 2xy - x^2 - 6y$. Подберите преобразования сдвига и поворота, диагонализующее потенциальную энергию. Будет ли квадратичная форма, отвечающая кинетической энергии, диагональной? Напишите уравнения движения в двух системах и убедитесь в их ковариантности.

3. Если преобразование затрагивает не только координаты, но и время, преобразование функции Лагранжа не сводится к замене переменных, в отличие от действия. Найдите новую функцию Лагранжа, если в исходной системе $L = \dot{x}^2 + 4(x - t)^2 + 4t^2$, а преобразования имеют вид $x = -\xi$, $t = -5\tau - 5\xi$. Как преобразовываются скорость и ее производная? Составьте уравнения движения в двух системах и проверьте их ковариантность.

4. Для произвольной системы с одной степенью свободы проверьте, что преобразования координат и времени $x = \xi + 2\tau$, $t = \tau + 3\xi^2$ оставляют уравнения движения истинными, если в функции Лагранжа сделать замену переменных и умножить ее на производную $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau$.

5. Частным случаем преобразований координат является переход в неинерциальную систему отсчета. Получите уравнения движения частицы массой m, находящейся в поле $U(\mathbf{r})$, в неинерциальной системе отсчета, движущейся вдоль направления $(3, 0, -1)$ со скоростью, модуль которой $v(t) = t(1 + 4\sin t)$.

6. Запишите функцию Лагранжа и уравнения движения частицы массой m, находящейся в поле $U(\mathbf{r})$, в неинерциальной системе отсчета, вращающейся вокруг оси x с угловой скоростью, модуль которой $\omega(t) = t^2 + 2$. Используйте декартову систему координат.

7. Найдите правила, по которым преобразуются обобщенные импульсы и энергия системы с двумя степенями свободы при переходе к координатам ξ, η согласно соотношениям $x = 2t(\xi - \eta)$, $y = t\xi^2 + 2\eta$.

8. Рассмотрим двумерное движение точки массой m в поле $U(\mathbf{r})$. Переход к новой ортогональной системе координат задается квадратичной формой для элемента длины $\mathrm{d}s^2 = \xi^4\mathrm{d}\xi^2 + \xi^2\eta^2\mathrm{d}\eta^2$. Определим ускорение точки как отношение силы к ее массе, а сила определяется градиентом потенциальной энергии. Напишите уравнения движения в новой системе. Найдите ускорение точки.

9. При переходе от координат x, y к ξ, η обобщенные импульсы и энергия преобразуются по закону $P_\xi = -(\eta - 2\xi^2)P_x + \eta^2 P_y$, $P_\eta = (2t^2 - \xi)P_x + (2\xi\eta + \eta^2)P_y$, $\varepsilon = E - 4t\eta P_x$. Каким мог быть явный вид преобразований?

10. Учет сил трения или реакции связей в подходе Лагранжа осуществляется введением в правую часть уравнений Эйлера-Лагранжа соответствующих обобщенных сил R_i. Найдите эти силы в системе координат ξ, η, если в исходной системе x, y они имели вид $R_x = 2\dot{x}^2 x + y^2 t$, $R_y = \dot{y}^2 + 3t\sin x$, а преобразования координат задаются соотношениями $x = \xi t + \eta^2$, $y = 3\xi\eta$.

Домашнее задание №8

Преобразования координат.

Вариант 20

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{y} + x^2 - y$. Введем новые координаты согласно соотношениям $x = \xi + 3\eta$, $y = 2\eta$. Составьте новую функцию Лагранжа. Напишите уравнения Эйлера-Лагранжа в исходной и в новой системах координат. Проверьте, что из справедливости первых следует справедливость вторых.

2. Функция Лагранжа системы $L = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 4y^2 - 2xy - x^2 + x$. Подберите преобразования сдвига и поворота, диагонализующее потенциальную энергию. Будет ли квадратичная форма, отвечающая кинетической энергии, диагональной? Напишите уравнения движения в двух системах и убедитесь в их ковариантности.

3. Если преобразование затрагивает не только координаты, но и время, преобразование функции Лагранжа не сводится к замене переменных, в отличие от действия. Найдите новую функцию Лагранжа, если в исходной системе $L = -\sqrt{1 - \dot{x}^2} + 2(x + t)^2$, а преобразования имеют вид $x = 5\xi - 3\tau$, $t = 5\tau - 3\xi$. Как преобразовываются скорость и ее производная? Составьте уравнения движения в двух системах и проверьте их ковариантность.

4. Для произвольной системы с одной степенью свободы проверьте, что преобразования координат и времени $x = \xi^4$, $t = -\xi + 2\tau$ оставляют уравнения движения истинными, если в функции Лагранжа сделать замену переменных и умножить ее на производную $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau$.

5. Частным случаем преобразований координат является переход в неинерциальную систему отсчета. Получите уравнения движения частицы массой m, находящейся в поле $U(\mathbf{r})$, в неинерциальной системе отсчета, движущейся вдоль направления $(0, 1, -5)$ со скоростью, модуль которой $v(t) = -7t + 4t^3$.

6. Запишите функцию Лагранжа и уравнения движения частицы массой m, находящейся в поле $U(\mathbf{r})$, в неинерциальной системе отсчета, вращающейся вокруг оси y с угловой скоростью, модуль которой $\omega(t) = 4t^4 + 2$. Используйте декартову систему координат.

7. Найдите правила, по которым преобразуются обобщенные импульсы и энергия системы с двумя степенями свободы при переходе к координатам ξ, η согласно соотношениям $x = -\xi + t^2\eta$, $y = t\xi^2 + 2\eta$.

8. Рассмотрим двумерное движение точки массой m в поле $U(\mathbf{r})$. Переход к новой ортогональной системе координат задается квадратичной формой для элемента длины $\mathrm{d}s^2 = \xi^6\mathrm{d}\xi^2 + \xi^3\eta\mathrm{d}\eta^2$. Определим ускорение точки как отношение силы к ее массе, а сила определяется градиентом потенциальной энергии. Напишите уравнения движения в новой системе. Найдите ускорение точки.

9. При переходе от координат x, y к ξ, η обобщенные импульсы и энергия преобразуются по закону
$P_\xi = (2\eta - 2\xi^2)P_x + (\eta^2 - t^2/2)P_y$, $P_\eta = 2\xi P_x + (2\xi\eta + \eta)P_y$, $\varepsilon = E + t\xi P_y$. Каким мог быть явный вид преобразований?

10. Учет сил трения или реакции связей в подходе Лагранжа осуществляется введением в правую часть уравнений Эйлера-Лагранжа соответствующих обобщенных сил R_i. Найдите эти силы в системе координат ξ, η, если в исходной системе x, y они имели вид $R_x = 2\dot{x}^2x + y^4t^2$, $R_y = \dot{y}^3 + 3$, а преобразования координат задаются соотношениями $x = \xi t + \eta$, $y = 3(\xi + \eta)t$.

Домашнее задание №8

Преобразования координат.

Вариант 21

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = 2\dot{x}^2 - 2x\dot{y}^2 + xy - x$. Введем новые координаты согласно соотношениям $x = \xi + \eta$, $y = -\xi\eta$. Составьте новую функцию Лагранжа. Напишите уравнения Эйлера-Лагранжа в исходной и в новой системах координат. Проверьте, что из справедливости первых следует справедливость вторых.

2. Функция Лагранжа системы $L = \dot{x}^2 + 2\dot{y}^2 + y^2 - 2xy - x^2 + 3y$. Подберите преобразования сдвига и поворота, диагонализующее потенциальную энергию. Будет ли квадратичная форма, отвечающая кинетической энергии, диагональной? Напишите уравнения движения в двух системах и убедитесь в их ковариантности.

3. Если преобразование затрагивает не только координаты, но и время, преобразование функции Лагранжа не сводится к замене переменных, в отличие от действия. Найдите новую функцию Лагранжа, если в исходной системе $L = 2\dot{x}^2 + 2(2x - t)^2 + 4x^2$, а преобразования имеют вид $x = -5\xi$, $t = -\tau - \xi$. Как преобразовываются скорость и ее производная? Составьте уравнения движения в двух системах и проверьте их ковариантность.

4. Для произвольной системы с одной степенью свободы проверьте, что преобразования координат и времени $x = \xi^3$, $t = -3\xi + \tau$ оставляют уравнения движения истинными, если в функции Лагранжа сделать замену переменных и умножить ее на производную $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau$.

5. Частным случаем преобразований координат является переход в неинерциальную систему отсчета. Получите уравнения движения частицы массой m, находящейся в поле $U(\mathbf{r})$, в неинерциальной системе отсчета, движущейся вдоль направления $(-2, 4, -5)$ со скоростью, модуль которой $v(t) = 6 + 3t$.

6. Запишите функцию Лагранжа и уравнения движения частицы массой m, находящейся в поле $U(\mathbf{r})$, в неинерциальной системе отсчета, вращающейся вокруг оси z с угловой скоростью, модуль которой $\omega(t) = t^2 + 4$. Используйте декартову систему координат.

7. Найдите правила, по которым преобразуются обобщенные импульсы и энергия системы с двумя степенями свободы при переходе к координатам ξ, η согласно соотношениям $x = \xi + \eta$, $y = t\xi^2 + 2\eta$.

8. Рассмотрим двумерное движение точки массой m в поле $U(\mathbf{r})$. Переход к новой ортогональной системе координат задается квадратичной формой для элемента длины $\mathrm{d}s^2 = 4\xi^3\mathrm{d}\xi^2 + \xi^2\mathrm{d}\eta^2$. Определим ускорение точки как отношение силы к ее массе, а сила определяется градиентом потенциальной энергии. Напишите уравнения движения в новой системе. Найдите ускорение точки.

9. При переходе от координат x, y к ξ, η обобщенные импульсы и энергия преобразуются по закону $P_\xi = -(2\eta + \xi^2)P_x + \eta^2 P_y$, $P_\eta = -2\xi P_x + (2\xi\eta + \eta)P_y$, $\varepsilon = E + 4tP_x$. Каким мог быть явный вид преобразований?

10. Учет сил трения или реакции связей в подходе Лагранжа осуществляется введением в правую часть уравнений Эйлера-Лагранжа соответствующих обобщенных сил R_i. Найдите эти силы в системе координат ξ, η, если в исходной системе x, y они имели вид $R_x = -2\dot{x}^2 x + y^4 t$, $R_y = \dot{y}^3 + 3$, а преобразования координат задаются соотношениями $x = \xi^2 t + \eta$, $y = \xi + 2\eta$.

Домашнее задание №8

Преобразования координат.

Вариант 22

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x}^2 - 3\dot{y}^2 + xy^2$. Введем новые координаты согласно соотношениям $x = 2\xi + \eta$, $y = -\xi\eta$. Составьте новую функцию Лагранжа. Напишите уравнения Эйлера-Лагранжа в исходной и в новой системах координат. Проверьте, что из справедливости первых следует справедливость вторых.

2. Функция Лагранжа системы $L = \dot{x}^2 + 2\dot{y}^2 + y^2 - 4xy - x^2 - 4x$. Подберите преобразования сдвига и поворота, диагонализующее потенциальную энергию. Будет ли квадратичная форма, отвечающая кинетической энергии, диагональной? Напишите уравнения движения в двух системах и убедитесь в их ковариантности.

3. Если преобразование затрагивает не только координаты, но и время, преобразование функции Лагранжа не сводится к замене переменных, в отличие от действия. Найдите новую функцию Лагранжа, если в исходной системе $L = -\sqrt{1 - \dot{x}^2} + 2(x + t)^2$, а преобразования имеют вид $x = 5\xi - 4\tau$, $t = 5\tau - 4\xi$. Как преобразовываются скорость и ее производная? Составьте уравнения движения в двух системах и проверьте их ковариантность.

4. Для произвольной системы с одной степенью свободы проверьте, что преобразования координат и времени $x = \xi^5$, $t = \xi + \tau$ оставляют уравнения движения истинными, если в функции Лагранжа сделать замену переменных и умножить ее на производную $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau$.

5. Частным случаем преобразований координат является переход в неинерциальную систему отсчета. Получите уравнения движения частицы массой m, находящейся в поле $U(\mathbf{r})$, в неинерциальной системе отсчета, движущейся вдоль направления $(-2, 1, -5)$ со скоростью, модуль которой $v(t) = -2t + 4t^5$.

6. Запишите функцию Лагранжа и уравнения движения частицы массой m, находящейся в поле $U(\mathbf{r})$, в неинерциальной системе отсчета, вращающейся вокруг оси x с угловой скоростью, модуль которой $\omega(t) = t^3 - 6$. Используйте декартову систему координат.

7. Найдите правила, по которым преобразуются обобщенные импульсы и энергия системы с двумя степенями свободы при переходе к координатам ξ, η согласно соотношениям $x = \xi^2 + t\eta$, $y = t^2\xi - 2\eta$.

8. Рассмотрим двумерное движение точки массой m в поле $U(\mathbf{r})$. Переход к новой ортогональной системе координат задается квадратичной формой для элемента длины $\mathrm{d}s^2 = 16\xi^5\mathrm{d}\xi^2 + \xi^2\eta^4\mathrm{d}\eta^2$. Определим ускорение точки как отношение силы к ее массе, а сила определяется градиентом потенциальной энергии. Напишите уравнения движения в новой системе. Найдите ускорение точки.

9. При переходе от координат x, y к ξ, η обобщенные импульсы и энергия преобразуются по закону $P_\xi = (\eta + 2t^2)P_x + \eta^2 P_y$, $P_\eta = \xi P_x + (2\xi\eta + \eta)P_y$, $\varepsilon = E - 8t\xi P_x$. Каким мог быть явный вид преобразований?

10. Учет сил трения или реакции связей в подходе Лагранжа осуществляется введением в правую часть уравнений Эйлера-Лагранжа соответствующих обобщенных сил R_i. Найдите эти силы в системе координат ξ, η, если в исходной системе x, y они имели вид $R_x = 2\dot{x}^2 xt + y^2$, $R_y = \dot{y}^3 + 3xy$, а преобразования координат задаются соотношениями $x = \xi t + \eta t^3$, $y = \xi^2\eta$.

Домашнее задание №8

Преобразования координат.

Вариант 23

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = \dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{y} - 4x^2 - y$. Введем новые координаты согласно соотношениям $x = \xi + 2\eta$, $y = \eta$. Составьте новую функцию Лагранжа. Напишите уравнения Эйлера-Лагранжа в исходной и в новой системах координат. Проверьте, что из справедливости первых следует справедливость вторых.

2. Функция Лагранжа системы $L = 4\dot{x}^2 + 2\dot{y}^2 - 2y^2 + 4xy - x^2 - x$. Подберите преобразования сдвига и поворота, диагонализующее потенциальную энергию. Будет ли квадратичная форма, отвечающая кинетической энергии, диагональной? Напишите уравнения движения в двух системах и убедитесь в их ковариантности.

3. Если преобразование затрагивает не только координаты, но и время, преобразование функции Лагранжа не сводится к замене переменных, в отличие от действия. Найдите новую функцию Лагранжа, если в исходной системе $L = 4\dot{x}^2 + (x - 2t)^2 + t^2$, а преобразования имеют вид $x = 4\xi$, $t = \xi - 4\tau$. Как преобразовываются скорость и ее производная? Составьте уравнения движения в двух системах и проверьте их ковариантность.

4. Для произвольной системы с одной степенью свободы проверьте, что преобразования координат и времени $x = \tau^3$, $t = \xi + 5\tau$ оставляют уравнения движения истинными, если в функции Лагранжа сделать замену переменных и умножить ее на производную $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau$.

5. Частным случаем преобразований координат является переход в неинерциальную систему отсчета. Получите уравнения движения частицы массой m, находящейся в поле $U(\mathbf{r})$, в неинерциальной системе отсчета, движущейся вдоль направления $(-2, -1, -5)$ со скоростью, модуль которой $v(t) = t + 4t^4$.

6. Запишите функцию Лагранжа и уравнения движения частицы массой m, находящейся в поле $U(\mathbf{r})$, в неинерциальной системе отсчета, вращающейся вокруг оси x с угловой скоростью, модуль которой $\omega(t) = 10 - t^2$. Используйте декартову систему координат.

7. Найдите правила, по которым преобразуются обобщенные импульсы и энергия системы с двумя степенями свободы при переходе к координатам ξ, η согласно соотношениям $x = -t(\xi + t\eta)$, $y = t\xi + 2\eta$.

8. Рассмотрим двумерное движение точки массой m в поле $U(\mathbf{r})$. Переход к новой ортогональной системе координат задается квадратичной формой для элемента длины $\mathrm{d}s^2 = \xi^5 \mathrm{d}\xi^2 + \xi^2\eta \mathrm{d}\eta^2$. Определим ускорение точки как отношение силы к ее массе, а сила определяется градиентом потенциальной энергии. Напишите уравнения движения в новой системе. Найдите ускорение точки.

9. При переходе от координат x, y к ξ, η обобщенные импульсы и энергия преобразуются по закону $P_\xi = -(\eta - \xi^4)P_x + \eta^2 P_y$, $P_\eta = -\xi P_x + (2\xi\eta + \eta - 3t^2)P_y$, $\varepsilon = E + 6t\eta P_y$. Каким мог быть явный вид преобразований?

10. Учет сил трения или реакции связей в подходе Лагранжа осуществляется введением в правую часть уравнений Эйлера-Лагранжа соответствующих обобщенных сил R_i. Найдите эти силы в системе координат ξ, η, если в исходной системе x, y они имели вид $R_x = 2\dot{x}^2 x + y^2 t$, $R_y = \dot{y}^3 t^2$, а преобразования координат задаются соотношениями $x = \xi t - 2\eta$, $y = 3\xi\eta$.

Домашнее задание №8

Преобразования координат.

Вариант 24

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = -2\dot{x}^2 - x\dot{y}^2 + xy + x$. Введем новые координаты согласно соотношениям $x = -\xi - \eta$, $y = -\xi\eta$. Составьте новую функцию Лагранжа. Напишите уравнения Эйлера-Лагранжа в исходной и в новой системах координат. Проверьте, что из справедливости первых следует справедливость вторых.

2. Функция Лагранжа системы $L = 4\dot{x}^2 + 2\dot{y}^2 - 2y^2 - 4xy - x^2 + x$. Подберите преобразования сдвига и поворота, диагонализующее потенциальную энергию. Будет ли квадратичная форма, отвечающая кинетической энергии, диагональной? Напишите уравнения движения в двух системах и убедитесь в их ковариантности.

3. Если преобразование затрагивает не только координаты, но и время, преобразование функции Лагранжа не сводится к замене переменных, в отличие от действия. Найдите новую функцию Лагранжа, если в исходной системе $L = -\sqrt{1-\dot{x}^2} + 2(x+t)^2$, а преобразования имеют вид $x = 5\xi + 4\tau$, $t = 5\tau + 4\xi$. Как преобразовываются скорость и ее производная? Составьте уравнения движения в двух системах и проверьте их ковариантность.

4. Для произвольной системы с одной степенью свободы проверьте, что преобразования координат и времени $x = -\xi^4$, $t = \xi - 7\tau$ оставляют уравнения движения истинными, если в функции Лагранжа сделать замену переменных и умножить ее на производную $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau$.

5. Частным случаем преобразований координат является переход в неинерциальную систему отсчета. Получите уравнения движения частицы массой m, находящейся в поле $U(\mathbf{r})$, в неинерциальной системе отсчета, движущейся вдоль направления $(-2, 4, -5)$ со скоростью, модуль которой $v(t) = 4t^2 - 2t$.

6. Запишите функцию Лагранжа и уравнения движения частицы массой m, находящейся в поле $U(\mathbf{r})$, в неинерциальной системе отсчета, вращающейся вокруг оси y с угловой скоростью, модуль которой $\omega(t) = -t - 4$. Используйте декартову систему координат.

7. Найдите правила, по которым преобразуются обобщенные импульсы и энергия системы с двумя степенями свободы при переходе к координатам ξ, η согласно соотношениям $x = \xi + t\eta$, $y = t^2(\xi + \eta)$.

8. Рассмотрим двумерное движение точки массой m в поле $U(\mathbf{r})$. Переход к новой ортогональной системе координат задается квадратичной формой для элемента длины $\mathrm{d}s^2 = 4\xi^3\mathrm{d}\xi^2 + 25\xi^2\eta^4\mathrm{d}\eta^2$. Определим ускорение точки как отношение силы к ее массе, а сила определяется градиентом потенциальной энергии. Напишите уравнения движения в новой системе. Найдите ускорение точки.

9. При переходе от координат x, y к ξ, η обобщенные импульсы и энергия преобразуются по закону $P_\xi = (3\eta - 2\xi^2)P_x + 2\eta^2 P_y$, $P_\eta = (3\xi - t^2)P_x + (4\xi\eta + 4\eta^3)P_y$, $\varepsilon = E + 2t\eta P_x$. Каким мог быть явный вид преобразований?

10. Учет сил трения или реакции связей в подходе Лагранжа осуществляется введением в правую часть уравнений Эйлера-Лагранжа соответствующих обобщенных сил R_i. Найдите эти силы в системе координат ξ, η, если в исходной системе x, y они имели вид $R_x = 2\dot{x}^2 x + y^2 t^2$, $R_y = \dot{y}^3 + 3$, а преобразования координат задаются соотношениями $x = 2(\xi + \eta)t$, $y = \xi - 3\eta$.

Домашнее задание №8

Преобразования координат.

Вариант 25

1. Функция Лагранжа системы с двумя степенями свободы имеет вид $L = -4\dot{x}^2 + 4\dot{y}^2 - xy^2$. Введем новые координаты согласно соотношениям $x = -2\xi + \eta$, $y = \xi\eta$. Составьте новую функцию Лагранжа. Напишите уравнения Эйлера-Лагранжа в исходной и в новой системах координат. Проверьте, что из справедливости первых следует справедливость вторых.

2. Функция Лагранжа системы $L = \dot{x}^2 + 2\dot{y}^2 - 2y^2 + 4xy - 2x^2 - x$. Подберите преобразования сдвига и поворота, диагонализующее потенциальную энергию. Будет ли квадратичная форма, отвечающая кинетической энергии, диагональной? Напишите уравнения движения в двух системах и убедитесь в их ковариантности.

3. Если преобразование затрагивает не только координаты, но и время, преобразование функции Лагранжа не сводится к замене переменных, в отличие от действия. Найдите новую функцию Лагранжа, если в исходной системе $L = 4\dot{x}^2 + 2(x - 2t)^2 + 4t^2$, а преобразования имеют вид $x = \xi/2$, $t = 2\tau + \xi$. Как преобразовываются скорость и ее производная? Составьте уравнения движения в двух системах и проверьте их ковариантность.

4. Для произвольной системы с одной степенью свободы проверьте, что преобразования координат и времени $x = -2\tau^4$, $t = 2\xi - \tau$ оставляют уравнения движения истинными, если в функции Лагранжа сделать замену переменных и умножить ее на производную $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau$.

5. Частным случаем преобразований координат является переход в неинерциальную систему отсчета. Получите уравнения движения частицы массой m, находящейся в поле $U(\mathbf{r})$, в неинерциальной системе отсчета, движущейся вдоль направления $(-3, 0, 1)$ со скоростью, модуль которой $v(t) = t + 5$.

6. Запишите функцию Лагранжа и уравнения движения частицы массой m, находящейся в поле $U(\mathbf{r})$, в неинерциальной системе отсчета, вращающейся вокруг оси x с угловой скоростью, модуль которой $\omega(t) = -1 + 2t$. Используйте декартову систему координат.

7. Найдите правила, по которым преобразуются обобщенные импульсы и энергия системы с двумя степенями свободы при переходе к координатам ξ, η согласно соотношениям $x = \xi + t\eta$, $y = t\xi^2 + 2\eta^2$.

8. Рассмотрим двумерное движение точки массой m в поле $U(\mathbf{r})$. Переход к новой ортогональной системе координат задается квадратичной формой для элемента длины $\mathrm{d}s^2 = 25\xi^6\mathrm{d}\xi^2 + \xi^2\eta\mathrm{d}\eta^2$. Определим ускорение точки как отношение силы к ее массе, а сила определяется градиентом потенциальной энергии. Напишите уравнения движения в новой системе. Найдите ускорение точки.

9. При переходе от координат x, y к ξ, η обобщенные импульсы и энергия преобразуются по закону
$P_\xi = (\eta - 4\xi^4)P_x + (\eta^2 + t^4)P_y$, $P_\eta = \xi P_x + (2\xi\eta + \eta)P_y$, $\varepsilon = E - 4t^3\xi P_y$. Каким мог быть явный вид преобразований?

10. Учет сил трения или реакции связей в подходе Лагранжа осуществляется введением в правую часть уравнений Эйлера-Лагранжа соответствующих обобщенных сил R_i. Найдите эти силы в системе координат ξ, η, если в исходной системе x, y они имели вид $R_x = 4\dot{x}^2x + y^2t$, $R_y = \dot{y}^2 + 3tx$, а преобразования координат задаются соотношениями $x = \xi t + \eta$, $y = \xi^2 + \eta$.